УДК 378 / 621. 372. 542

А.А. Грешилов,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Инженерное образование и конфлюэнтный анализ

Инженерные вузы, как известно, готовят специалистов, которые проводят различные измерения и наблюдения. Другими словами, они оперируют случайными величинами. Но любые экспериментальные значения содержат ошибки, которые могут серьезно повлиять на результаты анализа. Однако во многих случаях учет всех погрешностей исходных данных не проводится. Практика показывает, что многие не умеют пользоваться имеющимися алгоритмами подсчета погрешностей, а некоторые о них даже не знают.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Учесть все погрешности исходных данных позволяет *конфлюэнтный анализ*. Но в учебниках по математической статистике конфлюэнтный анализ даже не упоминается.

Понятие «конфлюэнтный анализ» появилось в начале 1930-х годов. Но оказалось, что оценка параметров даже прямой линии приводит к системам нелинейных уравнений, решать которые тогда не могли. В то время даже укоренились некоторые ошибочные мнения. Например, такое, что в методе наименьших квадратов всегда получаем несмещенные оценки искомых параметров.

Будем считать, что вид оцениваемых функций априори известен, но надлежит найти точечные и интервальные оценки свободных параметров этих функций, по которым сможем определить точечные и интервальные оценки самих функций. Конфлюэнтный анализ позволяет учитывать влияние всех случайных величин, участвующих в расчете. Применение конфлюэнтного анализа рассмотрим на примере оценки параметров прямой линии методом наименьших квадратов, широко применяемым в различных приложениях.

Рассмотрим уравнение прямой $Y = aX + b$, когда необходимо определить точечные оценки параметров a и b и их дисперсии. Если имеем дело с детерминированными величинами, то записи $Y = aX + b$ и $X = Y/a - b/a$ эквивалентны. А когда имеем дело со случайными величинами, то при применении метода наименьших квадратов записи $Y = aX + b$ и $X = Y/a - b/a$ при одних и тех же исходных данных приведут к разным результатам. В первой записи Y случайная величина, а X – детерминированная, так как регрессия Y на X (рис.1). Для второй же записи все наоборот, потому что регрессия X на Y (рис. 2).

Если по одним и тем же результатам наблюдений

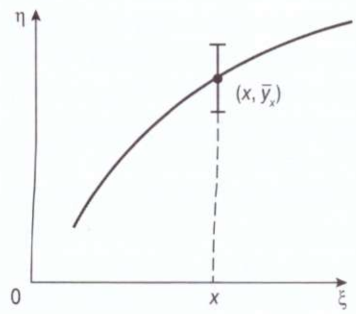

Рис. 1. Регрессия Y на X

Показана необходимость учета погрешности всех величин, участвующих в расчете. Это позволяют сделать алгоритмы конфлюэнтного анализа. Приводится алгоритм оценки параметров функции известного вида на примере прямой линии с помощью конфлюэнтного анализа, позволившего учесть погрешности по X и Y. Анализируется ошибочное мнение, что в методе наименьших квадратов оценки всегда несмещенные.

Ключевые слова: конфлюэнтный анализ, алгоритм, погрешности, метод наименьших квадратов.

The article demonstrates the need to take into account all the errors of the values involved in the calculation. This lead to the confluent analysis algorithms. An algorithm for estimating the parameters of the function of a certain species in a straight line using the example of confluent analysis will take into account errors in the X and Y show the error view that OLS estimates (Least square method) are always unbiased.

Key words: confluent analysis, algorithms, errors, least square method.

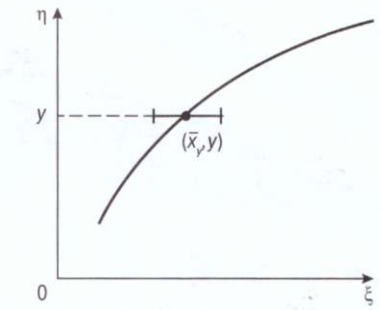

Рис. 2. Регрессия X на Y

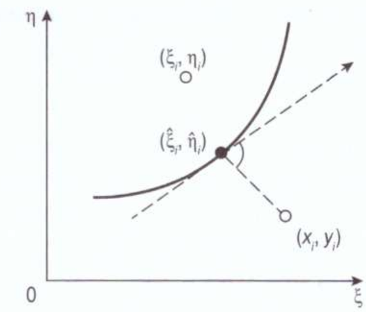

Рис. 3. Метод ортогональной регрессии

найти параметры a и b и представить их на одном графике, то получим разные линии. Это явление называется «регрессионный парадокс» (рис. 5).

В конфлюэнтном анализе применяются разные методы учета погрешностей [1, 2]. Мы рассмотрим только метод ортогональной регрессии (рис. 3).

Пусть нам известны набор случайных точек x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и закон распределения каждого наблюдения. В действительности x_i, y_i – это точечные оценки неизвестных параметров прямой ξ и η, которые определить нельзя. «Истинное» уравнение прямой имеет вид $\eta = a\varepsilon + b$. Случайные величины y и x связаны с η и ξ следующим образом:

$$x_i = \xi_i + \delta_i; \; y_i = \eta_i + \varepsilon_i, \; i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где δ_i и ε_i – соответственно ошибки значений переменных и функции, т. е. случайные величины.

В конфлюэнтном анализе рассматриваются две схемы экспериментов: пассивная и активная [1, 2]. Рассмотрим наиболее часто применяемую пассивную схему. Из-за присутствия помехи в пассивной схеме эксперимента мы не можем увидеть точные значения η и ξ, но можем наблюдать соответственно случайные величины y и x, которые в случае аддитивной помехи и определяются по формуле (1).

Неопределенность каждой точки теперь, в отличие от регрессий η на ξ и ξ на η, имеет вид некоторой области, форма которой зависит от закона распределения результатов наблюдений. Пусть результаты наблюдений x_i и y_i подчиняются нормальным законам распределения соответственно с математическими ожиданиями ξ_i и η_i, дисперсиями $\sigma^2(x_i)$ и $\sigma^2(y_i)$ и коэффициентами корреляции ρ_i. Тогда функция правдоподобия приводит при $\rho = 0$ к функционалу

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i - \xi_i)^2}{\sigma^2(x_i)} + \frac{(y_i - \eta_i)^2}{\sigma^2(y_i)}\right] \to \min. \quad (2)$$

Геометрически при $\sigma(x_i) = \sigma(y_i) = 1$ формула (2) означает, что минимизируется сумма квадратов расстояний между точками (x_i, y_i) и соответствующими точками кривой регрессии (ξ_i, η_i).

Однако из функционала F нельзя найти оценки параметров $\hat{\theta}_j = (a, b)$; $j = 1, 2$, так как решить систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - \eta_i}{\sigma^2(y_i)}\frac{\partial \eta_i}{\partial \theta_j}\bigg|_{\theta_j = \hat{\theta}_j} = 0, \quad (3)$$

$$j = 1, 2,$$

нельзя, поскольку неизвестны истинные значения ξ_i, входящие в выражения для η_i.

Доопределим условие задачи. В качестве оценок $\hat{\xi}_i$ возьмем те значения ξ_i, которые обратят в нуль частные производные $\frac{\partial F}{\partial \xi_i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = \frac{x_i - \xi_i}{\sigma^2(x_i)} + \frac{y_i - \eta_i}{\sigma^2(y_i)}\frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i} = 0. \quad (4)$$

Это условие при $\sigma(x_i) = \sigma(y_i) = 1$ есть условие ортогональности векторов $\{(x_i - \hat{\xi}_i); (y_i - \hat{\eta}_i)\}$ и $\left\{1; \frac{\partial \eta_i}{\partial \xi_i}\right\}$. Причем последний вектор направлен по касательной к кривой $\eta = f(\xi, \theta)$ или вдоль прямой при линейной регрессии (рис. 3). Задача минимизации функционала (2) при условии (4) эквивалентна решению системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \eta_i)}{\sigma^2(y_i)}\frac{\partial f}{\partial \theta_j} = 0, \quad (5)$$

$$j = \overline{1, m}; \; i = \overline{1, n}; \; n \geq m,$$

при $$\frac{x_i - \xi_i}{\sigma^2(x_i)} + \frac{y_i - \eta_i}{\sigma^2(y_i)}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} = 0.$$

Тогда для прямой линии

$$F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(y_i-b-ax_i\right)^2}{\sigma^2\left(y_i\right)+a^2\sigma^2\left(x_i\right)}. \qquad (6)$$

Вид сечения функционала F по a приведен на рис. 4. Здесь видно и смещение оценки по a, и нелинейность системы уравнений.

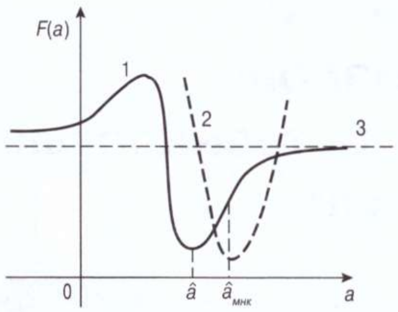

Рис. 4. Сечение по функционалу F (1) и метода наименьших квадратов (2)

Рассмотрим на примере значения параметров ортогональной регрессии, регрессии Y на X и регрессии X на Y:

Исходные данные: $Y = aX + b$ при $a = 1$; $b = 0$.

X: 2; 2.02; 1.98; 2.01; 1.95

$\sigma(X)$: 0.01; 0.015; 0.012; 0.005; 0.007

Y: 1.95; 2.01; 1.98; 2.02; 2

$\sigma(Y)$: 0.007; 0.005; 0.012; 0.015; 0.01

По этим данным получены следующие результаты.

Параметры ортогональной регрессии:

D[.] – дисперсия; a = 1; b = 5,474E-6; $D[a]$ = 0,2821; $D[b]$ = 1,10;2; $\rho[a, b]$ = –0,5577 (коэффициент корреляции a и b).

Параметры регрессии Y на X:

a = 0,3055; b = 1,38; $D[a]$ = 0,02288; $D[b]$ = 0,09176; $[a, b]$ = –0,04582. Здесь Y – функция, X – аргумент.

Параметры регрессии X на Y:

a = 0,3055; b = 1,38; $D[a]$ = 0,02288; $D[b]$ = 0,09176; $[a, b]$ = –0,04582. Здесь X – функция, Y – аргумент.

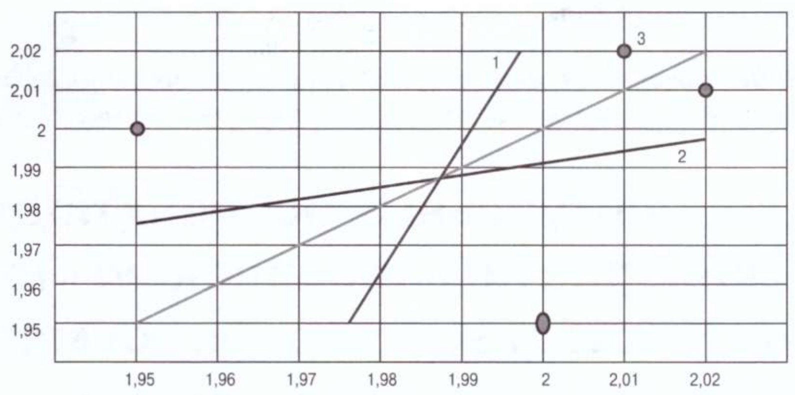

Рис. 5. Линии регрессии X на Y (1); Y на X (2) и ортогональной (3)

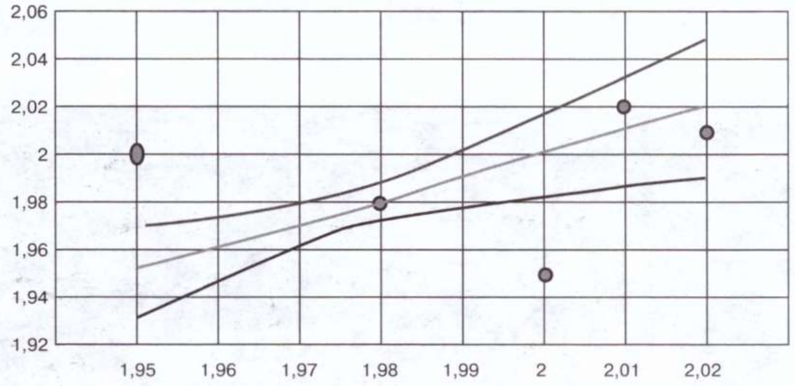

Рис. 6. Интервальная оценка линии ортогональной регрессии при доверительной вероятности 0,95

На рис. 5 приведены 3 линии регрессии X на Y (1); Y на X (2) и ортогональная (3). При учете всех случайных величин (конфлюэнтный анализ) получаем линию ортогональной регрессии (рис. 6), которая указывает правильное направление. Алгоритм и программы построения линий ортогональной регрессии приведены в книге [2, с. 366–371] и на диске, вложенном в книгу.

Обратимся теперь к смещению оценок методом наименьших квадратов. Рассмотрим линейную многомерную модель $\vec{y}=\vec{x}\vec{\theta}+\vec{\varepsilon}$. Оценка параметров определяется по формуле $\hat{\vec{\theta}}=\left(\vec{x}^T\vec{x}\right)^{-1}\vec{x}^T\vec{y}$. Условия несмещенности оценок – математическое ожидание оценки равно самой оценке

$$M\left[\hat{\vec{\theta}}\right]=M\left[\left(\vec{x}^T\vec{x}\right)^{-1}\vec{x}^T\vec{y}\right]=$$

$$=\left(\vec{x}^T\vec{x}\right)^{-1}\vec{x}^T M\left[\vec{y}\right],$$

из которых видно, что достаточно появиться хотя бы одной случайной величине X, как оценки станут смещенными.

В настоящей статье мы рассмотрели алгоритм оценки параметров функции известного вида на примере прямой линии с помощью конфлюэнтного анализа, позволившего учесть погрешности по X и $У$. Было показано ошибочное мнение, что в методе наименьших квадратов оценки всегда несмещенные.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Грешилов А.А.* Некорректные задачи цифровой обработки информации и сигналов. Изд. 2-е, доп. М.: Логос, 2009. 360 с.
2. *Грешилов А.А.* Математические методы принятия решений. Изд. 2-е, доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 645 с.

LITERATURA

1. *Greshilov A.A.* Nekorrektnye zadachi cifrovoj obrabotki informacii i signalov. Izd. 2-e, dop. M.: Logos, 2009. 360 s.
2. *Greshilov A.A.* Matematicheskie metody prinjatija reshenij. Izd. 2-e, dop. M.: Izd-vo MGTU im. N.Ye. Baumana, 2014. 645 s.